Séries Numériques

I – Généralités :

Définition :

1°) On appelle série de terme général u_n et on note Σu_n un couple de suite $((u_n)_n,(S_n)_n)$ avec :
$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles.

2°) On dit que Σu_n est convergente ou divergente selon que (S_n) converge ou diverge.

3°) Dans le cas où Σu_n converge, on appelle somme de cette série la limite de la suite (S_n) et on la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

4°) Toujours dans le cas de la convergence, on appelle reste (de Cauchy) à l'ordre n le nombre défini par : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = S - S_n$.

Remarque :
Si on modifie un nombre fini de termes d'une série, on ne modifie pas sa convergence, mais on modifie sa somme (s'il y a convergence…)

Remarque :

Si Σu_n converge, alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Propriété :
Si la série réelle ou complexe Σu_n converge et si $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors la série $\Sigma (\lambda.u_n)$ converge aussi et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda.u_n) = \lambda.\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Corollaire :
Si la série Σu_n diverge et si $\lambda \neq 0$, alors $\Sigma (\lambda.u_n)$ diverge aussi.

Propriété :

Si Σu_n et Σv_n convergent, alors $\Sigma (u_n + v_n)$ converge aussi et : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Corollaire :
Si Σu_n converge et Σv_n diverge, alors $\Sigma (u_n + v_n)$ diverge.

Remarque :
On peut définir la somme de deux séries et le produit par un scalaire. L'ensemble s_K des séries muni de ces deux lois est un K-espace vectoriel. L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de s_K.

Propriété :
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + y_n$ avec $(x_n , y_n) \in \mathbb{R}^2$, alors la série Σz_n converge si et seulement si Σx_n et Σv_n convergent, et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i.\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$.

Remarque :
Pour toute suite $(S_n)_{n\in \mathbb{N}}$, il existe une unique suite (u_n) telle que (S_n) soit la suite des sommes partielles de la série Σu_n.

Propriété :
Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire que son terme général tende vers 0.

Définition :
On appelle série géométrique de raison q et de premier terme u_0 la série de terme général $u_n = u_0.q^n$

Propriété :
Si $u_0 \neq 0$, la série géométrique $\Sigma u_0.q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, sa somme est : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_0.q^n = u_0.\frac{1-q^n}{1-q}$.

Propriété : (Critère de Cauchy)
La série réelle ou complexe Σu_n converge si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_0 \in \mathbb{N} , \forall n \geq n_0 , \forall p > n , |S_p - S_n| \leq \varepsilon$ et $\left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right| \leq \varepsilon$.

II – Critères de Convergence des séries positives :

Propriété :
Soit Σu_n une série positive, cette série converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in N}(S_n)$

Propriété :
Soit Σu_n et Σv_n deux séries positives. Si $u_n = O(v_n)$ et si Σv_n converge, alors Σu_n converge.

Corollaire :
1°) Négligeabilité : Soit Σu_n et Σv_n deux séries positives. Si $u_n = o(v_n)$ et si Σv_n converge, alors Σu_n converge.
2°) Equivalence : Soit Σu_n et Σv_n deux séries positives. Si $u_n \sim v_n$, alors les séries Σu_n et Σv_n sont de même nature.

Remarque :
En pratique, quand on utilise ce dernier résultat, il suffit que l'une des séries soit positive, car on pourra raisonner à partir d'un certain rang au delà duquel u_n et v_n seront positives.

Propriété : (Règle de d'Alembert)

Soit une série Σu_n strictement positive, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite L, alors :

Si L < 1, la série Σu_n converge. Si L > 1, la série diverge. Et si L = 1, c'est le cas douteux.

Définition :

On appelle séries de Riemann les séries $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in R$.

Propriété :

La série $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

III – Convergence Absolue :

Définition :

On dit qu'une série réelle ou complexe Σu_n converge absolument si et seulement si $\Sigma |u_n|$ converge.

Remarque :

Si Σu_n est une série positive, la notion de convergence avoslue n'a aucun intérêt.

Propriété :

Si la série Σu_n converge absolument, alors cette série converge. De plus, dans ce cas, on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \text{ et } \forall k \in N \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$$

Remarque :

Si $\Sigma |u_n|$ converge, alors Σu_n converge absolument.

Si $\Sigma |u_n|$ diverge, alors Σu_n ne converge pas absolument, mais elle peut diverger ou converger.

Remarque :

Soit Σu_n une série réelle ou complexe. Si on a trouvé une série positive Σv_n convergente telle que $u_n = O(v_n)$. Alors Σu_n converge absolument.

Remarque :

Si Σu_n est une série réelle ou complexe avec $\forall n \in N$, $u_n \neq 0$. Si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ tend vers L, Alors :

Si L < 1, Σu_n converge absolument. Si L > 1, la série diverge grossièrement. Si L = 1, c'est douteux.

Définition :

On appelle séries exponentielles les séries $\Sigma \frac{z^n}{n!}$ avec $z \in C$.

Propriété :

$\forall z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\Sigma \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Définition :

On pose : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Rappel :

On sait que $\Sigma \frac{1}{n!}$ converge et que sa somme vaut e.

IV – Séries de signe quelconque ou séries complexes :

Définition :
On dit qu'une série Σu_n est alternée si et seulement si on peu écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n.v_n$ où (v_n) est une suité réelle de signe constant.

Propriété : (Théorème des séries alternées)
Si Σu_n est une série alternée et si $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant, alors Σu_n est convergente et de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et $|R_n| \leq |u_n|$

Remarque :
1°) Les deux suites extraites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes. On a donc pour tout n un encadrement de la somme par S_n et S_{n+1}.
2°) La somme est du signe de son premier terme. Ceci s'applique aussi au reste.

Propriété :

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente et sa somme vaut ln(2).

Définition :
On appelle produit de (Cauchy) de deux séries Σu_n et Σv_n la série Σw_n définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{p+q=n} u_p.v_q$

Propriété :
Si les deux séries Σu_n et Σv_n convergent absolument, alors la série produit Σw_n converge absolument. De plus, si U, V et W sont leurs sommes respectives, on a : W = U.V

Propriété :
$\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1).\exp(z_2)$

A savoir montrer : (Cela sert très très souvent)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \text{ avec } 0 \le \gamma \le 1.$$

Pour montrer uniquement la convergenge de la série harmonique Σ 1/k, on peut montrer que la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ de Σ u_n avec : ∀ n ≥ 2, $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers ln(n).

On a alors : $u_n = 1/n + \ln(1 - 1/n)$ (qui donne par développement limité quand n tend vers l'infini)
$= 1/n + (- 1/n + O(1/n^2))$
$= O(1/n^2)$

or la série Σ $1/n^2$ converge (série de Riemann avec α > 1). Donc S_n converge.

En posant γ la limite de S_n , il vient : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

(En utilisant l'encadrement de Σ 1/k par des intégrales, on montre que 0 ≤ γ ≤ 1)

V – Calcul approché de la somme d'une série :

Principe :
Considérant une série convergente, on utilise la formule $S = S_n + R_n$.
On cherche un encadrement de R_n permettant d'en déduire pour n choisi une valeur approchée de R_n à ε_1 près (en général $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$) qu'on appelle l'incertitude sur la méthode.
Avec la valeur de n choisie, on calcule S_n et on estime très grossièrement les erreurs d'arrondi ε_2 (en général faibles, donc $\varepsilon_2 < \varepsilon/2$)
D'où la valeur approchée de S à ε près.

Cas d'une série vérifiant le théorème des séries alternées :
On a une estimation sur la méthode grâce à $|R_n| \le |u_n|$
Le meilleur résultat s'obtient alors par un encadrement de S par 2 sommes partielles successives.

Cas d'une convergence rapide :
On cherche un réel k ∈]0,1[vérifiant à partir d'un certain rang $|u_{n+1}| / |u_n| \le k$.
On a alors : $|R_n| \le k.|u_n| / (1 - k)$. D'où l'erreur sur la méthode.

BILAN :

Techniques pour étudier une série :

On cherche à étudier une série Σu_n, voici les différentes techniques à employer :

1°) Utiliser la définition de u_n
2°) Chercher la lim de u_n
3°) Observer le signe de u_n
4°) Chercher un équivalent simple de un
5°) Utiliser la règle de d'Alembert
6°) Utiliser le critère de Cauchy
7°) Comparer la série à une série connue (Riemann ou autre)
8°) On calcule $n^{\alpha}.u_n$ et on cherche à montrer :

soit que $n.u_n \to +\infty$, alors $1/n = o(u_n)$ donc Σu_n diverge.

soit que $n^2.u_n \to 0$, alors $u_n = o(1/n^2)$ donc Σu_n converge.

© Archi 2001
http://www.prepasciences.com